第２講　場合の数・確率

1 ［1］ A，B，Cの３人が次のように勝負をくり返す．１回目にはAとBの間で硬貨投げにより勝敗を決める．２回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの１人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが２連勝するか，または，100回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．

(1) ４回以内の勝負でAが２連勝する確率を求めよ．

(2) $n=2, 3, \cdots\cdots, 100$ とする．n 回以内の勝負で，A，B，Cのうち誰かが２連勝する確率を求めよ．

［2］ １から４までの番号を１つずつ書いた４枚のカードがある．この中から１枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す．これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が３の倍数である確率を a_n，４の倍数である確率を b_n とおく．このとき，a_n と b_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 4枚のカードがあって，1から4までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1枚引いては数字を記録し，カードをもとに戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，a_1，a_2，……，a_n とする．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする．

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1),\ A_{n-1}(2),\ \cdots\cdots,\ A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3)$，$A_n(4)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1から n $(n \geqq 3)$ までの自然数を1つずつ書いた n 枚のカードがある．その中から，でたらめに3枚のカードを同時に取りだすとき，それら3枚のカードに書いてある数の中で1番小さい数を X_1，2番目に小さい数を X_2，残りの数を X_3 とする．さらに，$Y=X_3-X_1$ とする．

(1)　$n=5$ のとき，$X_2>Y$ となる確率を求めよ．

(2)　一般の n に対し，$Y=k$ となる確率 $P(Y=k)$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ と Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．ただし，必要なら $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ を用いてもよい．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　場合の数・確率

1 ［1］ A，B，Cの3人が次のように勝負をくり返す．1回目にはAとBの間で硬貨投げにより勝敗を決める．2回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの1人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが2連勝するか，または，100回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．

(1)　4回以内の勝負でAが2連勝する確率を求めよ．

(2)　$n=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 100$ とする．n 回以内の勝負で，A，B，Cのうち誰かが2連勝する確率を求めよ．

(1)　4回以内の勝負でAが2連勝するのは，勝者を順に列挙すると，AAまたはBCAAの場合のみ．

よって，求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$

(2)　n 回以内にA，B，Cが3人の誰も2連勝しないのは，2回目～n 回目の各回においてその前の回に参加しなかった人が勝つ場合（1回目はA，Bのどちらが勝ってもよい）であり，その確率は

$$1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

したがって，求める確率は $\boldsymbol{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$

1 ［2］ 1から4までの番号を1つずつ書いた4枚のカードがある．この中から1枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す．これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が3の倍数である確率を a_n，4の倍数である確率を b_n とおく．このとき，a_n と b_n を求めよ．

n 個の数の積が3の倍数になるのは，n 個の数の中に少なくとも1個3が含まれるときである．それは，3が1個も含まれないことの余事象であるから

$$a_n=\boldsymbol{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

n 個の数の積が4の倍数にならないのは

(i)　n 個とも1または3

(ii)　n 個のうち，1個が2，残り $n-1$ 個が1または3

のいずれかである．

$$b_n=1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{1-\frac{n+2}{2^{n+1}}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　4枚のカードがあって，1から4までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1枚引いては数字を記録し，カードをもとに戻す．この試行をn回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，a_1，a_2，……，a_nとする．

(1)　条件$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = j$を満たす数列が$A_n(j)$通りあるとする．ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$とする．

(i)　$A_n(1)$，$A_n(2)$を求めよ．

(ii)　$n \geqq 2$のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$を$A_{n-1}(1),\ A_{n-1}(2),\ \cdots\cdots,\ A_{n-1}(j)$で表し，$A_n(3)$，$A_n(4)$を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

(1)　(i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = 1$となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = 1$のときのみである．

よって　$A_n(1) = \mathbf{1}$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = 2$となるのは

$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = 2$

$a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = \cdots\cdots = a_n = 2$

$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = a_4 = \cdots\cdots = a_n = 2$

⋮

$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_{n-1} = 1,\ a_n = 2$　のn通りである．

よって　$A_n(2) = \boldsymbol{n}$

(ii)　$n \geqq 2$のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$となるのは

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} = 1$　（$A_{n-1}(1)$通り）

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} = 2$　（$A_{n-1}(2)$通り）

⋮

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} = j$　（$A_{n-1}(j)$通り）で，かつ，それぞれで$a_n = j$となる場合である．

よって　$A_n(j) = \boldsymbol{A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + \cdots\cdots + A_{n-1}(j)}$

$j=3$のとき，(i)の結果を利用して

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3)$$
$$= A_{n-1}(3) + n$$

したがって　$A_{n+1}(3) = A_n(3) + (n+1)$であり，$A_1(3) = 1$　（$a_1 = 3$の1通り）であるから

$n \geqq 2$のとき　$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$

$j=4$のとき，(i)の結果を利用して

$$A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4) = 1 + (n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n + A_{n-1}(4)$$
$$= A_{n-1}(4) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

したがって　$A_{n+1}(4) = A_n(4) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$であり，$A_1(4) = 1$であるから

$n \geqq 2$のとき

$$A_n(4) = A_1(4) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=1+\frac{1}{12}(n-1)n(2n-1)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

(2)　この試行には全部で 4^n 通りの場合がある．

$n\geqq 2$ のとき，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}$　かつ　$a_{n-1}>a_n$　となるのは，

$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}=j$ の $A_{n-1}(j)$ 通りに対し，$a_n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ j-1$ の

$j-1$ 通りである．

よって，題意を満たす数列は

$$A_{n-1}(2)\cdot 1+A_{n-1}(3)\cdot 2+A_{n-1}(4)\cdot 3=(n-1)\cdot 1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot 2+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\cdot 3$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)\ （通り）$$

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}}$

3　1から n ($n\geqq 3$) までの自然数を1つずつ書いた n 枚のカードがある．その中から，でたらめに3枚のカードを同時に取りだすとき，それら3枚のカードに書いてある数の中で1番小さい数を X_1，2番目に小さい数を X_2，残りの数を X_3 とする．さらに，$Y=X_3-X_1$ とする．

(1)　$n=5$ のとき，$X_2>Y$ となる確率を求めよ．

(2)　一般の n に対し，$Y=k$ となる確率 $P(Y=k)$　($k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$)　と Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．ただし，必要なら $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ を用いてもよい．

---

(1)　$n=5$ のとき，カードの取り出し方は全部で ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通り．

このうち，$X_2>Y$　つまり　$X_2>X_3-X_1$ より，$X_1+X_2>X_3$ を満たす X_1，X_2，X_3 の組は，$(X_1,\ X_2,\ X_3)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 5)$ の3通りのみである．

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(2)　3枚のカードの選び方は全部で，${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通り．

$Y=k$　つまり　$X_3-X_1=k$ より，$X_3=X_1+k$　ここで，$X_1\geqq 1$，$X_3\leqq n$ より

$1\leqq X_1\leqq n-k$

よって，X_1，X_3 の組は　$(X_1,\ X_3)=(1,\ 1+k),\ (2,\ 2+k),\ \cdots\cdots,\ (n-k,\ n)$ の $n-k$ 通り．

これらの組のそれぞれについて，X_2 の選び方は

$X_1+1\leqq X_2\leqq X_3-1$　の　$(X_3-1)-(X_1+1)+1=X_3-X_1-1=k-1$（通り）

よって　$P(Y=k)=\dfrac{(n-k)(k-1)}{{}_n\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\dfrac{6(n-k)(k-1)}{n(n-1)(n-2)}}$

$$E(Y)=\sum_{k=2}^{n-1}k\cdot P(Y=k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P(Y=k)\quad (P(Y=1)=P(Y=n)=0\ より)$$

$$=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2-nk\}$$

$$=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\left\{-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　次のようなコイン投げのゲームを行う．はじめに３枚のコインを投げ，表の出たコインがあれば，２回目には，表の出たコインのみを投げる．３回目以降も同様に投げることとする．こうして，ある回で裏のみが出たところで，このゲームは終了となる．このとき，以下となる確率をそれぞれ求めよ．

(1)　１回目でゲームが終了しない．

(2)　２回投げてもゲームが終了しない．

(3)　２回目で表が１枚だけ出る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　箱の中に, 1から9までの番号を1つずつ書いた9枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から2枚のカードを同時に選び，小さいほうの数をAとする．これらのカードを箱に戻して，再び2枚のカードを同時に選び，小さいほうの数をBとする．A=Bである確率を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　場合の数・確率　　練習問題　解答

1　次のようなコイン投げのゲームを行う．はじめに３枚のコインを投げ，表の出たコインがあれば，２回目には，表の出たコインのみを投げる．３回目以降も同様に投げることとする．こうして，ある回で裏のみが出たところで，このゲームは終了となる．このとき，以下となる確率をそれぞれ求めよ．

(1)　１回目でゲームが終了しない．

(2)　２回投げてもゲームが終了しない．

(3)　２回目で表が１枚だけ出る．

解答例

余事象の利用

(1)　１回目で［ゲームが終了する］のは，すべて裏が出たときであり，その確率は

$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

よって，　１回目でゲームが終了しない確率は　$1-\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{7}{8}}$

> １回目がすべて表なので３枚とも２回目も振る．よって２回目においても「１回目でゲームが終了しない確率」が使える．

(2)　題意を満たすのは，１回目に少なくとも１枚表が出た後，残ったコインを投げ，２回目に少なくとも１枚表が出る場合である．

１回目にすべて表のとき，確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}=\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{64}$

１回目に２枚のみ表のとき，確率は　${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$

１回目に１枚のみ表のとき，確率は　${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

> ２回目のコインの枚数が１回目に応じて変化するため，２回目の確率が変化する計算となっている．

以上より，求める確率は　$\frac{7}{64}+\frac{9}{32}+\frac{3}{16}=\mathbf{\frac{37}{64}}$

【別解】　３枚のコインがすべて１回目または２回目に裏になればゲームは終了する．各コインにおいて，「１回目または２回目に裏が出る」ことの「余事象」は，「１回目，２回目ともに表が出る」ことである．よって，ゲームが終了する確率は

$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

> 各コインに確率的な差がなく，またお互いの表裏の結果が（ゲームの終了以外に）他に影響を及ぼさないため，それぞれのコインの確率を考えるだけで解くことができた．

ゆえに，２回投げてもゲームが終了しない確率は　$1-\frac{27}{64}=\mathbf{\frac{37}{64}}$

(3)　（(2)のように１回目の表の枚数による場合分けで解くこともできるが，ここは**【別解】**における「１回目または２回目に裏が出る」確率を利用する．）

題意を満たすのは，２回とも表が出るコインが１枚のみで，残り２枚は「１回目または２回目に裏が出る」ときである．よって，求める確率は　${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\mathbf{\frac{27}{64}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている．ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を A とする．これらのカードを箱に戻して, 再び 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を B とする．A=B である確率を求めよ．

解答例

9 枚のカードから 2 枚のカードを選ぶ場合の数は ${}_9C_2=36$（通り）.

1 回目に選んだ 2 枚のカードの内, 小さい方の数を A$=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）とおくと大きい方の数は

A$=k$ のそれぞれに対して $k+1, k+2, \cdots\cdots, 9$ の $9-(k+1)+1=9-k$（通り）ある．

片方を文字でおき，それによってもう片方を表す．

A=B=1 から A=B=9 まですべての確率を出し, それを加えることも可能であるが,「1～9 のカードの数字が連続していて欠けも重複もない」ところに注目すれば, 数字を「文字」で置いて確率を計算し, その和は Σ に任せるという発想に至ることは自然であろう．

よって，A$=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）となる確率は $\dfrac{9-k}{36}$

同様に，B$=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）となる確率についても $\dfrac{9-k}{36}$

よって，A=B$=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）となる確率は $\left(\dfrac{9-k}{36}\right)^2$

ゆえに，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{9-k}{36}\right)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2$$

$$=\frac{1}{36^2}\sum_{i=1}^{8}i^2$$

$$=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot8\cdot9\cdot17$$

$$=\mathbf{\frac{17}{108}}$$

授業で扱ったのは「期待値」の計算における Σ の利用.

$$\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=8^2+7^2+\cdots\cdots+2^2+1^2$$

$$=\sum_{i=1}^{8}i^2$$

となる．Σ は特に具体的な項の和として列挙することも必要であり, この書き換えも頻出である．ちなみに文字が k から i に変わっているが，本当は変える必要はない．ただし，「意味を変えずに書き換えた」というニュアンスを濃く出すことも時には必要であるため，多くの解答で文字が変わっている．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。